ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2026

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ & ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡ/ΚΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΟΜΑΔΑ ΚΑΘΗΓΗΤΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ «ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ»

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 133

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 51

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 185

Α4. α) Λ **β)** Σ **γ)** Σ **δ)** Σ **ε)** Λ

ΘΕΜΑ Β

$f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ $f(x)=2\ln(x-1)$

$g:[2,+\infty)\to\mathbb{R}$ $g(x)=\sqrt{x-2}+1$

Β1. $$A_{f\circ g}=\begin{cases}x\in A_g\\ g(x)\in A_g\end{cases}=\begin{cases}x\geq 2\\ \sqrt{x-2}+1>1\end{cases}=\begin{cases}x\geq 2\\ \sqrt{x-2}>0\end{cases}=\begin{cases}x\geq 2\\ x>2\end{cases}\Rightarrow x=2$$

Με $x\in(2,+\infty)$ $(f\circ g)(x)=f(g(x))=2\ln(\sqrt{x-2}+1-1)=\ln(\sqrt{x-2})^2=\ln(x-2)$

Β2. Στο $(2,+\infty)$ η $h(x)=\ln(x-2)$ παραγωγίσιμη ως συνθεση παραγωγίσιμων με

$$h'(x)=\frac{1}{x-2}>0,$$

άρα h γνησίως αύξουσα.

Από γνωστή πρόταση θα είναι “1-1”

Έστω $y \in \Sigma T_h = 1\mathbb{R}$ με $h(x) = y$

$y = \ln(x-2) \Leftrightarrow e^y = x-2 \Leftrightarrow e^y + 2 = x \Leftrightarrow h^{-1}(y) = e^y + 2$, με $y \in \mathbb{R}$

Οπότε $h^{-1}(x) = e^x + 2, \quad x \in \mathbb{R}$

Β3. $\lim\limits_{x\to 2}\left(h(x)\cdot\dfrac{f(x)}{x-2}\right) = \lim\limits_{x\to 2}\left(\ln(x-2)\cdot\dfrac{2\ln(x-1)}{x-2}\right) =$

$\lim\limits_{x\to 2}\ln(x-2)\cdot\lim\limits_{x\to 2}\left[2\dfrac{\ln(x-1)}{x-2}\right] = -\infty$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x-1)}{x-2} \overset{\text{D'L}}{=} \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\frac{1}{x-1}}{1} = 1$

και $\lim\limits_{x\to 2}\ln(x-2) = -\infty$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\kappa x^3 + \mu x}{x^2+1}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\kappa x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\kappa x$

Αν $\kappa \neq 0$ τότε $\lim\limits_{x\to\infty}\kappa x \begin{cases} \kappa>0 \\ \kappa<0 \end{cases} \begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}$ και δε θα είχε οριζόντια ασύμπτωτη

Άρα $\kappa = 0$

Αφού η ευθεία $y=x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f,

τότε $\begin{cases} f'(0) = 1 \\ \text{και} \\ f'(0) = 0 \end{cases}$

$$f'(x) = \left(\frac{\mu x}{x^2+1}\right) = \frac{\mu\cdot(x^2+1) - \mu x(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\mu x^2 + \mu - 2\mu x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\mu - \mu x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{\mu}{1} = 1$$

Για κ=0, μ=1, $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$

Γ2. $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{(x)'\cdot(x^2+1)-x\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 1-x^2=0\Leftrightarrow x=\pm 1$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow 1-x^2>0 \underset{(x^2+1)^2>0}{\Leftrightarrow} x\in(-1,1)$$

Το πρόσημο της f΄δίνει τη μονοτονία της f και φαίνεται στον παρακάτω πίνακα μεταβολών

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f΄(x)	-	0	+	0	-
f	↘	τ.ε.μ.	↗	τ.ε.μ.	↘

$\Sigma T_f=f(\mathbb{R})$

$\Delta_1=(-\infty,-1]$ $f\downarrow\Delta_1$, f συνεχής

$$f(\Delta_1)=\left[f(-1),\lim_{x\to-\infty}f(x)\right)=\left[-\frac{1}{2},0\right)$$

$\Delta_2=(-1,1]$ $f\uparrow\Delta_2$, f συνεχής

$$f(\Delta_2)=\left[f(-1),f(1)\right]=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ www.ekpedefsi.gr

$\Delta_3=[1,+\infty)$ $\quad f\downarrow\Delta_3$, $\quad f$ συνεχής

$f(\Delta_3)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),f(1)\right]=(0,1]$

Άρα $f(Df)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)\cup f(\Delta_3)=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

Είναι $\alpha^2\geq 0\Leftrightarrow\frac{1}{2}+\alpha^2\geq\frac{1}{2}$. Άρα $\left(\frac{1}{2}+\alpha^2\right)\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$

Για να έχει λύση η εξίσωση

$f(x)=\frac{1}{2}+\alpha^2$ Θα πρέπει $\frac{1}{2}+\alpha^2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\alpha=0$,

αφού $\Sigma T_f=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

Αν $\alpha=0$, τότε η $f(x)=\frac{1}{2}+\alpha^2$ έχει ακριβώς μία λύση την $x=1$

Αν $\alpha\neq 0$, $\frac{1}{2}+\alpha^2>\frac{1}{2}$ άρα η εξίσωση $f(x)=\frac{1}{2}+\alpha^2$ είναι αδύνατη.

Γ3. $I_v=\int_0^1\frac{x^{2v+1}}{x^2+1}dx$

$$I_v+I_{v+1}=\left(\int_0^1\frac{x^{2v+1}}{x^2+1}+\frac{x^{2(v+1)+1}}{x^2+1}\right)dx$$

$$=\int_0^1\frac{x^{2v+1}+x^{2v+1)}\cdot x^2}{x^2+1}dx$$

$$=\int_0^1\frac{x^{2v+1}\cdot(1-x^2)}{x^2+1}dx$$

$$=\int_0^1x^{2v+1}dx=\left[\frac{x^{2v+1+1}}{2v+2}\right]_0^1=\left[\frac{x^{2v+2}}{2v+2}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2v+2}$$

ii) $I_0=\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{x^2+1}dx$

$$=\frac{1}{2}[\ln(x^2+1)]_0^1=\frac{1}{2}(\ln 2-\ln 1)=\frac{1}{2}\ln 2$$

$$I_0+I_1=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\ln 2+I_1=\frac{1}{2}$$

ΚΑΤΑΛΗΞΗ www.ekpedefsi.gr

$$\Leftrightarrow \ln 2 + 2I_1 = 1 \Leftrightarrow 2I_1 = 1 - \ln 2$$

$$\Leftrightarrow I_1 = \frac{1-\ln 2}{2}$$

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1-\ln 2}{2} + I_2 = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2(1-\ln 2) + 4I_2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 4I_2 = 1 - (2 - 2\ln 2)$$

$$\Leftrightarrow 4I_2 = 1 - 2 + 2\ln 2$$

$$\Leftrightarrow 4I_2 = 2\ln 2 - 1$$

$$\Leftrightarrow I_2 = \frac{2\ln 2 - 1}{4}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παρ/μη με συνεχή παράγωγο

$0<g(x)<1, \quad x \in \mathbb{R}$

$g'(x) \neq -1, \quad x \in \mathbb{R}$

Έστω $h(x) = g(x) + x, \quad x \in [-1,0] \subseteq \mathbb{R}$

$h'(x) = g'(x) + 1$

$h'(x) \neq 0$ αφου $g'(x) \neq -1$ και αφού h' συνεχής

Άρα h' διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$

$h'(x) < 0$ ή $h'(x) > 0, x \in \mathbb{R}$

Οπότε h "1-1"

h συνεχής στο [-1,0]
$h(-1) = g(-1) - 1 < 0$
$h(0) = g(0) > 0$

Θ. Bolzano στο (-1,0) υπάρχει 1 τουλάχιστον $x_1 \in (-1,0)$ τ.ω $h(x_1) = 0$
$\Leftrightarrow g(x_1) + x_1 = 0$

Δ2.

$$f(x) = \begin{cases} x^2[g(x)+x], & x \in (-\infty, 0) \\ 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - \kappa x, & x \in [0, \pi/2) \end{cases}$$

ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ www.ekpedefsi.gr

με f παρ/μη

f παρ/μη στο $x_0 = 0$, άρα και συνεχής στο $x_0 = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x^2(g(x)+x)) = 0\cdot(g(0)) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}[2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - \kappa x] = 0$$

Και $f(0) = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2[g(x)+x]}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{2\eta\mu x}{x} + \frac{\varepsilon\varphi x}{x} - \kappa x\right]$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-} x(g(x)+x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2\eta\mu x}{x} + \frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \kappa x\right)$$

$$\Leftrightarrow 0 = 2+1-\kappa \Leftrightarrow \kappa = 3$$

Δ3. **i)** $f(x) = 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x, \quad x\in[0,\pi/2)$

$$f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} -$$

$$f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + \varepsilon\varphi^2 x + 1 - 3$$

$$f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + \varepsilon\varphi^2 x - 2, \quad x\in[0,\pi/2)$$

$$f''(x) = -2\eta\mu x + \frac{2\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$f''(x) = 2\eta\mu x\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^3 x} - 1\right)$$

αφού $\frac{1-\sigma\upsilon\nu^3 x}{\sigma\upsilon\nu^3 x} \geq 0$ και $\eta\mu x \geq 0$ είναι $f'(x)\geq 0$ με το "=" να ισχύει μόνο για x=0. Άρα

$f'(x) > 0$ για $x\in(0,\pi/2)$, οπότε $f'\uparrow[0,\pi/2)$

$\Sigma Tf' = [f'(0), \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f'(x))$

$= [0, +\infty)$

$f'(x) \geq 0$

άρα $f \uparrow [0, \pi/2)$

και $\Sigma Tf = \left[f(0), \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) \right) = [0, +\infty)$

Άρα $f(x) \geq 0$, $x \in [0, \pi/2)$

ii) $3f(x) = \pi \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{\pi}{3}$ $\qquad \dfrac{\pi}{3} \in [0, +\infty) = \Sigma Tf$

από ΘΕΤ υπάρχει 1 τουλάχιστον $x_2 \in [0, \pi/2)$

τ.ω $f(x_2) = \dfrac{\pi}{3}$

και αφού $f \uparrow [0, \pi/2)$, η λύση είναι μοναδική

Δ4. **i)** ΘΔΟ $f(x) \geq 0$, $x \in [x_1, 0)$

$\Leftrightarrow x^2(g(x) + x) \geq 0$

$\overset{x^2>0}{\Leftrightarrow} g(x) + x \geq 0$

$\underset{\Delta_1}{\Leftrightarrow} h(x) \geq 0$

Από Δ_1 είναι $h'(x) \neq 0$ και h' συνεχής,

Οπότε η h' διατηρεί το πρόσημο, άρα

$h'(x) > 0$, είτε $h'(x) < 0$, οπότε

$h \uparrow [x_1, 0)$ είτε $h \uparrow [x_1, 0)$

Αφού $-1 < x_1 < 0$

και $h(-1) < 0$

ενώ $h(x_1) = 0$

Θα είναι $-1 < x_1$
και $h(-1) < h(x_1)$
οπότε $h \uparrow [x_1, 0)$

και $\Sigma T_h = \left[h(x_1), \lim\limits_{x\to 0^-} h(x) \right)$ όπου $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (g(x) + x) = g(0) > 0$

$= [0, g(0))$

ΚΛΕΙΔΑΡΙΘΜΟΣ
www.ekpedefsi.gr

Τελικά $h(x)\geq 0,\ \ x\in[x_1,0)$

ii) Είναι $\int_{x_1}^{0} x^3\cdot g'(x)dx=\left[x^3\cdot g(x)\right]_{x_1}^{0}-\int_{x_1}^{0}3x^2\cdot g(x)dx$

$=-x^3\cdot g(x_1)-\int_{x_1}^{0}3x^2\cdot g(x)dx \overset{g(x_1)=-x_1}{\Rightarrow}$

$\int_{x_1}^{0} x^3\cdot g'(x)dx=-x^3(-x_1)-\int_{x_1}^{0}3x^2\cdot g(x)dx$

$\int_{x_1}^{0} x^3\cdot g'(x)dx=x_1^4-3\int_{x_1}^{0}x^2\cdot g(x)dx$ A

Αφού x_2 είναι ρίζα της εξίσωσης του ερωτ. Δ3ii): $3f(x_2)=\pi\Leftrightarrow f(x_2)=\dfrac{\pi}{3}$

και αφού ο $y'y$ χωρίζει το Ω οι δύο ισεμβαδικά χωρία: $\int_{x_1}^{0}f(x)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}f(x)dx$

$\int_{x_1}^{0}f(x)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-3x)dx\Leftrightarrow$

$\int_{x_1}^{0}x^2(g(x)+x)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-3x)dx\Leftrightarrow$

$\int_{x_1}^{0}x^2g(x)dx+\int_{x_1}^{0}x^3dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-3x)dx\Leftrightarrow$

$\int_{x_1}^{0}x^2g(x)dx+\left[\frac{x^4}{4}\right]_{x_1}^{0}=\left[-2\sigma\upsilon\nu x-(\ln\sigma\upsilon\nu x)-\frac{3x^2}{2}\right]_{0}^{\frac{\pi}{3}}$

$\int_{0}^{x_1}x^2g(x)dx-\frac{x_1^4}{4}=-1-\ln\frac{1}{2}-\frac{3\pi^2}{18}+2\Leftrightarrow$

$\int_{0}^{x_1}x^2g(x)dx=\frac{x_1^4}{4}-1+\ln 2-\frac{\pi^2}{6}+2\Leftrightarrow$

$\int_{0}^{x_1}x^2g(x)dx=\frac{x_1^4}{4}+\ln 2-\frac{\pi^2}{6}+1$

Επομένως η Α γίνεται:

$\int_{x_1}^{0}x^3g'(x)dx=x_1^4-\frac{3x_1^4}{4}-3\ln 2+\frac{3\pi^2}{6}-3$

$\int_{x_1}^{0}x^3\cdot g'(x)dx=\frac{x_1^4}{4}-3\ln 2+\frac{\pi^2}{2}-3$

ΚΛΕΙΔΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ www.ekpedefsi.gr

Σχόλιο

Τα σημερινά θέματα χαρακτηρίζονται από την κλιμάκωσή τους και το συσχετισμό τους με το σχολικό βιβλίο. Ξεφεύγουν από τη λογική των μεθοδολογιών και επιχειρούν να εξετάσουν κριτική και συνδυαστική σκέψη σε όλη την έκταση τους.

Εμφανίζεται απουσία υπαρξιακών θεωρημάτων, και «στροφή» στις θεμελιώδεις έννοιες που διατρέχουν την εξεταστέα ύλη.

ΕΚΠΑΙΔΕΥΣ www.ekpedefsi.gr